

Фазовый корректор дифференцирующей RC-цепи.

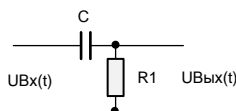
Предлагается метод фазовой коррекции влияния дифференцирующей цепи в тракте измерения АЦП на малых углах сдвига фазы и соответствующий метод калибровки фазы тракта измерения.

Введение.

Подключение АЦП к некоторым источникам сигналов осуществляется через дифференцирующую RC-цепь ([ФВЧ](#) первого порядка). Для достижения необходимой точности измерения фазы с помощью такого тракта измерения нередко встаёт задача коррекции фазового сдвига данного ФВЧ в [полосе частот](#) пропускания на малых углах сдвига фазы.

Постановка задачи.

Фазовый сдвиг в тракте измерения вносится дифференцирующей RC-цепью 1-го порядка, где емкость C , возможно, имеет значительный разброс (порядка $\pm 5\%$).

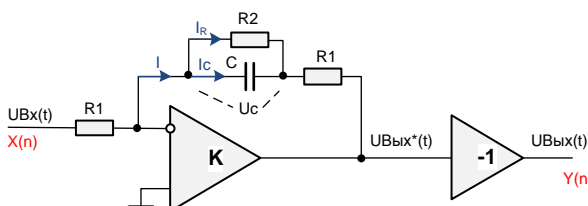


Для примера приводим численные исходные данные RC-цепи в трактах измерения некоторых изделий L-Card:

LTR24-2 (ICP-вход): $C=6,8 \text{ мкФ} \pm 5\%$, $R_1=25,5 \text{ кОм} \pm 0,5\%$.

LTR25: $C=6,8 \text{ мкФ} \pm 5\%$, $R_1=31,6 \text{ кОм} \pm 0,5\%$.

Предлагается корректирующий фильтр, в котором R_1 – это известная величина сопротивления, а C – это известная ёмкость. Величина сопротивления R_2 определяет глубину компенсации: при $R_2 = 0$ компенсация отсутствует, а при $R_2 = R_1$ – компенсация значительная.



Фильтр точно компенсирует ФЧХ и АЧХ дифференцирующей RC-цепи, когда $|X_C| \ll R_1$ (где $|X_C|$ –

это модуль импеданса ёмкости). Причём, чем больше R_2 , тем при большем $|X_c|$ можно достичь требуемую компенсацию. Побочным эффектом применения этого фильтра является сдвиг нижней границы полосы частот пропускания скорректированного тракта в сторону низких частот (чем больше R_2 , тем больше сдвиг) и увеличение равномерности АЧХ тракта в полосе частот пропускания (при условии, что значения R_1 и C тракта измерения и корректирующего фильтра выбраны соответствующей величины).

Аналоговое моделирование данного фильтра при $R_1 = R_2 = 25550$ и $C = 6,8 \cdot 10^{-6}$ показывает, что компенсация сдвига фазы на 50 Гц происходит с точностью $0,002^\circ$.

Вид ФЧХ и АЧХ показан на рисунке 1.

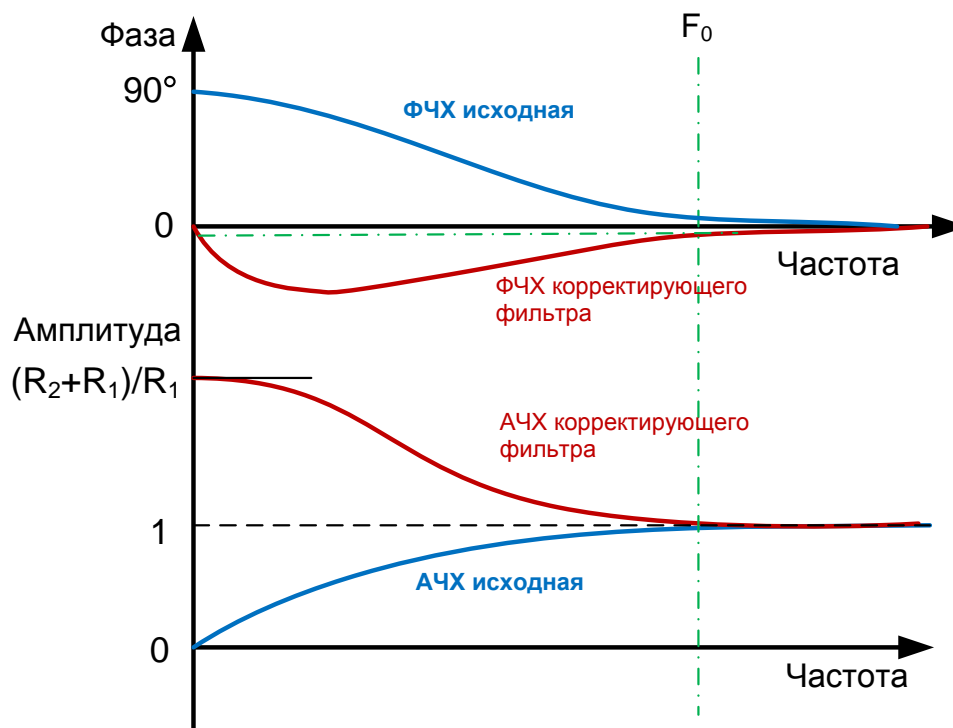
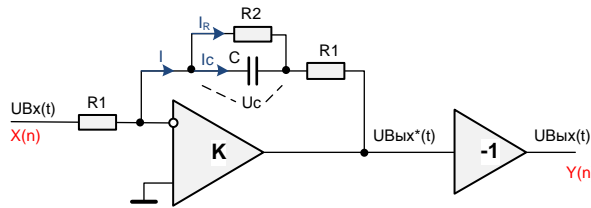


Рисунок 1. Исходные АЧХ, ФЧХ и АЧХ, ФЧХ корректирующего фильтра.

Далее получим эквивалентный цифровой рекурсивный фильтр 1-го порядка по данному аналоговому прототипу.

Полный вывод разностного уравнения цифрового фильтра по аналоговому прототипу.



Взаимосвязь токов и напряжений в аналоговом фильтре-прототипе описывается следующей системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} I = I_R + I_C \\ U_{ВХ}(t) + I * R_1 + U_C + I * R_1 = U_{ВЫХ}^*(t) \\ U_C = \frac{1}{C} \int I_C(t) dt \\ (U_{ВХ}(t) + I * R_1) * K = -U_{ВЫХ}^* \\ U_C = I_R * R_2 \\ U_{ВЫХ}^* = -U_{ВЫХ} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{ВХ}(t) + 2 * I * R_1 + U_C = -U_{ВЫХ}(t) \\ U_C = \frac{1}{C} \int (I(t) - \frac{U_C(t)}{R_2}) dt \\ (U_{ВХ}(t) + I * R_1) * K = U_{ВЫХ}(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -U_{ВЫХ}(t) - U_{ВХ}(t) - 2 * I * R_1 = \frac{1}{C} \int (I(t) - \frac{-U_{ВЫХ}(t) - U_{ВХ}(t) - 2 * I * R_1}{R_2}) dt \\ I = \frac{U_{ВЫХ}(t)}{K * R_1} - \frac{U_{ВХ}(t)}{R_1} \end{array} \right.$$

Учитывая, что при $K \rightarrow \infty$ слагаемое $\frac{U_{ВЫХ}(t)}{K * R_1} = 0$

$$\begin{aligned} & -U_{ВЫХ}(t) - U_{ВХ}(t) - 2 * (-\frac{U_{ВХ}(t)}{R_1}) * R_1 \\ & = \frac{1}{C} \int (-\frac{U_{ВХ}(t)}{R_1} - \frac{-U_{ВЫХ}(t) - U_{ВХ}(t) - 2 * (-\frac{U_{ВХ}(t)}{R_1}) * R_1}{R_2}) dt \\ & -U_{ВЫХ}(t) + U_{ВХ}(t) = \frac{1}{C} \int (-\frac{U_{ВХ}(t)}{R_1} - \frac{-U_{ВЫХ}(t) + U_{ВХ}(t)}{R_2}) dt \end{aligned}$$

После дифференцирования получим:

$$-\frac{d}{dt} U_{ВЫХ}(t) + \frac{d}{dt} U_{ВХ}(t) = -\frac{U_{ВХ}(t)}{R_1 * C} - \frac{-U_{ВЫХ}(t) + U_{ВХ}(t)}{R_2 * C}$$

Переход к разностному уравнению цифрового фильтра из дифференциального:

$$\frac{-(Y_n - Y_{n-1}) + (X_n - X_{n-1})}{\Delta t} = -\frac{X_n}{R_1 * C} - \frac{-Y_n + X_n}{R_2 * C}$$

Введём замену $C' = C/\Delta t$, где Δt – период дискретизации

$$-Y_n + Y_{n-1} + X_n - X_{n-1} = -\frac{X_n}{R_1 * C'} + \frac{Y_n}{R_2 * C'} - \frac{X_n}{R_2 * C'}$$

$$-Y_n - \frac{Y_n}{R_2 * C'} = -Y_{n-1} - \frac{X_n}{R_1 * C'} - \frac{X_n}{R_2 * C'} - X_n + X_{n-1}$$

$$-\frac{Y_n(1 + R_2 * C')}{R_2 * C'} = -Y_{n-1} - X_n\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1\right) + X_{n-1}$$

$$Y_n = Y_{n-1} \frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1} + X_n \frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1} \left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1\right) + X_{n-1} \frac{-R_2 * C'}{R_2 * C' + 1}$$

Итого, пришли к рекурсивному фильтру 1-го порядка [Л.1]:

$$y(n) = -ay(n-1) + b_1x(n) + b_0x(n-1),$$

где $a = -\frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1}$

где $b_1 = \frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1} \left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1\right)$

где $b_0 = -\frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1}$

$x(n)$ – входной отсчёт фильтра;

$x(n-1)$ – предыдущий входной отсчёт фильтра;

$y(n)$ – выходной отсчёт фильтра;

$y(n-1)$ – предыдущий выходной отсчёт фильтра;

Теоретически известно [Л.1], что его передаточная функция равна:

$$H(e^{j\tilde{\omega}}) = \frac{b_1 + b_0 e^{-j\tilde{\omega}}}{1 + a e^{-j\tilde{\omega}}}$$

$$\omega = 0 \dots \pi$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1} \left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 \right) - \frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1} e^{-j\omega}}{1 - \frac{R_2 * C'}{R_2 * C' + 1} e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 \right) - e^{-j\omega}}{\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 \right) - \cos(\omega) + j \sin(\omega)}{\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) + j \sin(\omega)}$$

Домножаем на комплексно-сопряженное знаменателю:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left(\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 - \cos(\omega) \right) + j \sin(\omega) \right) \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) - j \sin(\omega) \right)}{\left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right)^2 + \sin(\omega)^2}$$

$$\operatorname{Re} \{H(e^{j\omega})\} = \frac{\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 - \cos(\omega) \right) \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right) + \sin(\omega)^2}{\left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right)^2 + \sin(\omega)^2}$$

$$\operatorname{Im} \{H(e^{j\omega})\} = j \frac{\left(- \left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 - \cos(\omega) \right) * \sin(\omega) \right) + \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right) * \sin(\omega)}{\left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right)^2 + \sin(\omega)^2}$$

ФЧХ фильтра:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} \{H(e^{j\omega})\}}{\operatorname{Re} \{H(e^{j\omega})\}} \right)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(- \frac{\left(\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 - \cos(\omega) \right) * \sin(\omega) \right) - \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right) * \sin(\omega)}{\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 - \cos(\omega) \right) \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right) + \sin(\omega)^2} \right)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = - \frac{\left(\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 - \cos(\omega) \right) * \sin(\omega) \right) - \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right) * \sin(\omega)}{\left(\frac{1}{R_1 * C'} + \frac{1}{R_2 * C'} + 1 - \cos(\omega) \right) \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2 * C'} - \cos(\omega) \right) + \sin(\omega)^2} \quad \text{Домножаем на } C^2/C^2:$$

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\left(\left(\frac{C'}{R_1} + \frac{C'}{R_2} + C'^2 * (1 - \cos(\omega)) \right) * \sin(\omega) \right) - \left(C * \frac{R_2 * C' + 1}{R_2} - C'^2 * \cos(\omega) \right) * \sin(\omega)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + C' * (1 - \cos(\omega)) \right) \left(\frac{R_2 * C' + 1}{R_2} - C' * \cos(\omega) \right) + C'^2 * \sin(\omega)^2}$$

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{C' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * \sin(\omega) + C'^2 (1 - \cos(\omega)) * \sin(\omega) - C' \frac{R_2 * C' + 1}{R_2} \sin(\omega) + C'^2 * \cos(\omega) \sin(\omega)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{R_2 * C' + 1}{R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) C' * \cos(\omega) + \frac{R_2 * C' + 1}{R_2} C' * (1 - \cos(\omega)) - C' * (1 - \cos(\omega)) C' * \cos(\omega) + C'^2 * \sin(\omega)^2}$$

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{C' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * \sin(\omega) + C'^2 (1 - \cos(\omega)) * \sin(\omega) - C' \left(C' + \frac{1}{R_2} \right) \sin(\omega) + C'^2 * \cos(\omega) \sin(\omega)}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(C' + \frac{1}{R_2} \right) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) C' * \cos(\omega) + \left(C' + \frac{1}{R_2} \right) C' * (1 - \cos(\omega)) - C' * (1 - \cos(\omega)) C' * \cos(\omega) + C'^2 * \sin(\omega)^2}$$

$\operatorname{tg}(-\varphi) =$

$$\frac{C' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * \operatorname{SIN}(\omega) + C'^2 (1 - \operatorname{COS}(\omega)) * \operatorname{SIN}(\omega) - C'^2 * \operatorname{SIN}(\omega) - \frac{C'}{R_2} \operatorname{SIN}(\omega) + C'^2 * \operatorname{COS}(\omega) \operatorname{SIN}(\omega)}{C' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) C' * \operatorname{COS}(\omega) + C'^2 (1 - \operatorname{COS}(\omega)) + \frac{C'}{R_2} (1 - \operatorname{COS}(\omega)) - C'^2 * (1 - \operatorname{COS}(\omega)) * \operatorname{COS}(\omega) + C'^2 * \operatorname{SIN}(\omega)^2}$$

$$C'^2 \operatorname{tg}(-\varphi) (1 - \operatorname{COS}(\omega) - (1 - \operatorname{COS}(\omega)) * \operatorname{COS}(\omega) + \operatorname{SIN}(\omega)^2) - C'^2 (1 - \operatorname{COS}(\omega)) * \operatorname{SIN}(\omega) + C'^2 * \operatorname{SIN}(\omega) - C'^2 * \operatorname{COS}(\omega) \operatorname{SIN}(\omega) + C' \left(\operatorname{tg}(-\varphi) \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{COS}(\omega) + \frac{1}{R_2} (1 - \operatorname{COS}(\omega)) \right) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * \operatorname{SIN}(\omega) + \frac{1}{R_2} \operatorname{SIN}(\omega) \right) + \operatorname{tg}(-\varphi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_2} = 0$$

$$C'^2 \operatorname{tg}(-\varphi) (1 - 2 \operatorname{COS}(\omega) + \operatorname{COS}(\omega)^2 + \operatorname{SIN}(\omega)^2) - C'^2 \operatorname{SIN}(\omega) + C'^2 \operatorname{SIN}(\omega) * \operatorname{COS}(\omega) + C'^2 * \operatorname{SIN}(\omega) - C'^2 * \operatorname{COS}(\omega) \operatorname{SIN}(\omega) + C' \left(\operatorname{tg}(-\varphi) \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \operatorname{COS}(\omega) + \frac{1}{R_2} (1 - \operatorname{COS}(\omega)) \right) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * \operatorname{SIN}(\omega) + \frac{1}{R_2} \operatorname{SIN}(\omega) \right) + \operatorname{tg}(-\varphi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_2} = 0$$

$$C'^2 \operatorname{tg}(-\varphi) (2 - 2 \operatorname{COS}(\omega)) + C' \left(\operatorname{tg}(-\varphi) \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * (1 - \operatorname{COS}(\omega)) + \frac{1}{R_2} (1 - \operatorname{COS}(\omega)) \right) - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * \operatorname{SIN}(\omega) + \frac{1}{R_2} \operatorname{SIN}(\omega) \right) + \operatorname{tg}(-\varphi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_2} = 0$$

Итого, мы пришли к тривиальному квадратному уравнению относительно C' :

$$C'^2 \operatorname{tg}(-\varphi) (2 - 2 \operatorname{COS}(\omega)) + C' \left(\operatorname{tg}(-\varphi) \left(\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) * (1 - \operatorname{COS}(\omega)) \right) - \frac{1}{R_1} \operatorname{SIN}(\omega) \right) + \operatorname{tg}(-\varphi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{R_2} = 0$$

Данное уравнение имеет два решения с положительным C' , поскольку на графике (рисунок 1) ФЧХ корректирующего фильтра дважды пересекает ось с искомой постоянной фазой φ . Но неоднозначность корня не является технической проблемой в данной задаче, поскольку при малых углах сдвига фазы φ корни уравнения будут сильно отличаться по величине, а порядок величины C заранее известен.

Метод калибровки фазового сдвига в канале измерения.

1. Определить фазовый сдвиг Θ со стороны **входа тракта измерения** на частоте F_0 в каждом канале (напоминаем, что речь идёт о задаче компенсации малых углов сдвига фазы – типично не более нескольких градусов).
2. Решить квадратное уравнение относительно C' , подставив туда:
 $\varphi = -\Theta$
 $\omega = 2 * \pi * F_0 / F_D$, где F_D – это частота преобразования АЦП, F_0 – расчётная частота компенсации.
 Известные константы трактов измерения:
- LTR24-2 (ICP вход): $R_1 = 25,5 * 10^3$;
- LTR25: $R_1 = 31,6 * 10^3$.

$R_2 = (0,5...1)*R_1$ – это ориентировочный диапазон значений R_2 . Практически значение R_2 следует выбрать минимальным – достаточным для решения задачи, поскольку слишком большой R_2 из-за подъёма АЧХ фильтра в области низких частот может чрезмерно усилить шумы в области низких частот (ниже F_0). Определить $C = C' / F_D$

3. Отбросив корень уравнения, далеко отличающийся от величины искомого C , для значения C рассчитать три коэффициента рекурсивного фильтра.
4. Применить рекурсивный фильтр для данных, прошедших тракт измерения, для рассчитанных трёх коэффициентов рекурсивного фильтра. Данные коэффициенты использовать в качестве калибровочных.

Вывод.

Предложен аналитический метод расчёта коэффициентов рекурсивного фильтра 1-го порядка для задачи калибровки малого фазового сдвига дифференцирующей RC-цепи в тракте измерения. Предложенный метод расчёта коэффициентов рекурсивного фильтра имеет прозрачный физический смысл, поскольку основан на аналоговом прототипе фильтра.

Литература:

1. Вадутов О.С. Лекции по дисциплине “Математические основы обработки сигналов” – Томский политехнический университет – 2010-2010 гг.
2. Гарманов А.В. [Простой БИХ-фильтр коррекции излома АЧХ в низкочастотной области полосы частот пропускания](#) – L-Card – 2013 г.
3. Гарманов А.В. [Метод тонкой коррекции наклона АЧХ с помощью простого цифрового фильтра](#) – L-Card – 2013 г.

Версия статьи 1.1.
Сентябрь 2018 г.